# Mathématiques et formes d'abstraction : L'approche réaliste de saint Thomas permet-elle de penser les mathématiques modernes ?

*Introduction*

Le jésuite Peter Hoenen soulignait en 1934 un paradoxe : à une époque où les recherches sur les mathématiques connaissaient un développement vigoureux chez les épistémologues, elles étaient presque entièrement délaissées par les philosophes néo-scolastiques ; or, il y avait là un champ de recherche tout à fait fondamental pour le thomisme[1]. Depuis lors, près d'un siècle plus tard, il ne semble pas que ce champ ait été beaucoup labouré, et pourtant l'enjeu des mathématiques modernes pour le réalisme philosophique demeure de tout premier plan. Si le propos qui suit parvient à faire percevoir l'importance, il ne sera pas inutile.

En posant la question de la pertinence de la philosophie des mathématiques de saint Thomas eu égard aux formidables développements que cette science a connus à partir du XVIe siècle surtout, et de ce qu'on appelle communément la révolution scientifique, il ne s'agit pas de se demander si saint Thomas a anticipé de quelque manière que ce soit ces évolutions. La réponse à une telle interrogation est évidemment non. Il n'avait du reste pas à le faire, n'étant pas mathématicien lui-même. Il s'agit de montrer qu'il n'y a pas incompatibilité entre le savoir mathématique moderne et le réalisme philosophique. Autrement dit, de montrer, pour commencer et avant de pouvoir aller plus loin, que la théorie abstractive de la connaissance permet sinon de rendre compte du détail des développements des mathématiques et des raisonnements que celles-ci mettent en œuvre, ce qui n'est pas nécessaire ni même vraiment utile, du moins de *rendre raison* de ces développements. C'est là proprement le rôle de la philosophie des mathématiques, tout au moins à un premier niveau.

Mais aussitôt que le travail est ainsi cadré, il se voit opposer un certain nombre d'objections, qui soulèvent autant de difficultés d'ordres divers, factuels aussi bien que de principe.

Je commencerai par exposer et examiner les principales de ces difficultés, pour ensuite montrer dans quelle mesure la philosophie des mathématiques de saint Thomas permet d'y répondre.

## I. Des difficultés inhérentes aux conceptions des mathématiques

La première difficulté qui se présente à qui s'intéresse à la philosophie des mathématiques de saint Thomas est que le saint docteur ne lui consacré aucun écrit spécifique, et qu'elle est donc dispersée à travers son œuvre. Fort heureusement, il

[1] Cf. P. Hoenen, « A field of Research for Scholasticism », *The Modern Schoolman*, 12, novembre 1934, p. 15 *sq.*

existe une étude qui s'est efforcée de faire autant qu'il est possible cette synthèse, en collectant tous les lieux où saint Thomas est amené à parler des mathématiques, celle du clarétain et professeur de philosophie mexicain José Alvarez Laso, *La Filosofía de las Matemáticas en Santo Tomás*, publiée en 1952[2].

Mais au-delà de cette difficulté, les principaux obstacles qui se dressent sur notre chemin sont inhérents à la conception même des mathématiques.

J'examine dans ce qui suit successivement :

1° Le caractère daté des connaissances mathématiques de saint Thomas ;

2° Leur dépendance vis-à-vis d'Aristote, qui peut sembler problématique ;

3° La contestation par les Modernes de la présentation des mathématiques comme science de la quantité.

## 1. Une conception liée à un stade donné de l'histoire des mathématiques

Le premier point à souligner est en effet que saint Thomas raisonne sur les mathématiques principalement en fonction d'Euclide, qu'il a étudié à Naples en suivant la formation du *Quadrivium*.

Or, est-ce qu'une analyse de la mathématique euclidienne permet de rendre compte des développements ultérieurs des mathématiques ?

Les Modernes répondent par la négative : les mathématiques modernes sont tellement au-delà d'Euclide qu'on ne peut les penser en fonction de ce dernier.

## 2. Une conception liée à la philosophie d'Aristote

Une large part des développements de saint Thomas sur les mathématiques est par ailleurs en rapport avec les commentaires d'Aristote et de Boèce[3]. Or, pour nous en tenir au premier, son rapport aux mathématiques même de son temps est disputé :

+ Aristote aurait méconnu les évolutions mathématiques de son époque pour en rester à une conception pythagoricienne ;

+ ses raisonnements mathématiques (dans la *Physique* avant tout) seraient médiocres ;

+ il n'aurait pas compris le rapport des mathématiques à la physique, en s'opposant à la physique mathématique (cf. Archimède) ;

+ la logique dite formelle (prédicative) s'opposerait aux raisonnements propres aux mathématiques : cf. la méthode cartésienne, ou ce que Léon Brunschvicg appelait « la philosophie mathématique ».

---

[2] José Alvarez Laso, *La Filosofía de las Matemáticas en Santo Tomás*, Editorial Jus., Mexico, 1952. – Je remercie chaleureusement l'abbé Alain Contat de m'avoir communiqué cette référence.

[3] Il s'agit avant tout des commentaires de la *Physique*, des *Seconds Analytiques*, qui abondent en exemples tirés des mathématiques, et du commentaire du *De Trinitate* de Boèce, dans lequel saint Thomas développe sa conception de la hiérarchie des sciences et de ce qu'on a appelé les degrés d'abstraction. Cf. *infra*.

Certes un certain nombre d'arguments permettent des éléments de réponse, mais l'opposition de la logique prédicative aux mathématiques semble avoir une confirmation dans l'invention de la logistique à la fin du XIXe siècle et au début du XXe, et la position qui les oppose trouve un renfort dans la position du philosophe aristotélicien André de Muralt, qui oppose proposition prédicative et proposition mathématique, en rapprochant celle-ci des thèses d'Ockham et au-delà de celles de Platon.

Comment saint Thomas pourrait-il échapper aux mêmes critiques ?

### 3. Les mathématiques, une science de la quantité ?

Si on rentre dans l'analyse des mathématiques, on rencontre très vite des difficultés inhérentes à la conception de cette science et de son objet.

Pour commencer, saint Thomas, à la suite d'Aristote, donne comme objet aux mathématiques la quantité : « *mathematicae scientiae sunt de quantitate continua vel discreta* » (*In Anal. Post. I, lect. 2 n. 5*).

Or, il y a là deux points qui n'apparaissent plus comme aussi évidents aux Modernes.

+ Le fait que les mathématiques – et la science moderne en général – n'ait rapport qu'à la quantité est contesté ;

+ la division de la quantité entre quantité discrète et quantité continue est aussi un point remis en question par les Modernes, et ce dès l'invention de l'algèbre géométrique par Descartes : être parvenu à surmonter cette opposition serait même une marque distinctive des mathématiques modernes[4].

+ Faire des mathématiques la science de la quantité, c'est encore en faire *une science spéciale* ; or, c'est encore là un point contesté par les Modernes, dès la notion de *mathesis universalis*, promue par Leibniz, mais déjà en germe chez Descartes, et dont le rêve d'une pensée ramenée au calcul traverse toute la modernité jusqu'aux développements contemporains : l'évolution des mathématiques a toujours plus tendu à les présenter comme la forme même de la pensée, ramenée à sa structure logique. Il est évident qu'alors on est loin d'une science spéciale.

+ Enfin, faire des mathématiques la science de la quantité les inscrit dans le cadre de ce qu'on peut nommer une analytique de la substance, en entendant par cette expression le fait que la quantité en question est conçue, ainsi que nous l'avons rappelé, comme la première affection d'une substance sensible, et est dégagée pour elle-même par induction abstractive. Or, une telle analytique se heurte au primat donné à la relation dans le cadre des mathématiques modernes.

La notion aristotélicienne de substance disparaît ainsi complètement de l'horizon des mathématiques modernes, et il faut de ce point de vue en effet donner raison à André de Muralt quand il rapproche la mathématique de la dialectique de

[4] Cf. J. Dieudonné, *op. cit.*, p. 37. En rapport avec le point précédent, Dieudonné fait ici remarquer que des structures topologiques – par définition continues - ont été mises en évidence au sein de la théorie des nombres.

Platon. Comme illustration venant confirmer ce rapprochement, on peut citer les thèses d'Albert Lautman (mathématicien et philosophe des mathématiques, 1908-1944) qui interprète en effet de manière dialectique les mathématiques, en fonction d'Idées conçues comme des « schémas de structure selon lesquels s'organisent les théories effectives. » et qui mettent en jeu la dialectique du Même et de l'Autre, selon « un platonisme mieux adapté aux complexités de la réalité mathématique : un platonisme structurel et dynamique, non réifié, immobile ou éternel »[5].

Il apparaît ici clairement que la *mathesis*, loin d'être une science spéciale, tend à se présenter comme la science des structures fondamentales du réel, selon un mode idéal dont la réalité physique constituerait un participé.

Mais il apparaît aussi clairement que cette *mathesis* est inséparable d'une philosophie, et il n'est pas surprenant de ce point de vue, mais pas sans intérêt non plus, que Zalamea opère un rapprochement avec le commentaire du *Sophiste* par Heidegger, contemporain des travaux de Lautman, mais que celui-ci a ignoré[6]. Nul doute que la résolution ultime de la question ne se joue en métaphysique, dans la confrontation avec la philosophie de l'Un, que les mathématiques modernes mettent à l'évidence en jeu. Mais avant d'en venir à ce niveau de la réflexion et pour y parvenir, il est nécessaire de se confronter aux mathématiques en elles-mêmes.

La théorie abstractive des mathématiques développée par saint Thomas est-elle à même de le faire ?

## II. Éléments de réponse thomistes

Le raisonnement mathématique général est présenté de manière très synthétique mais très précise par saint Thomas dans un passage du *commentaire sur les seconds Analytiques* (lect. 2 n. 5 – cf. texte n°1).

Thomas dégage les trois stades du raisonnement mathématique :

1° la présupposition des données premières du genre de la quantité, unité, ligne, superficie, et autres ;

2° la recherche et la détermination par démonstrations opératoires, c'est-à-dire par construction (« quasi operativae ») des réalités qui s'en suivent, triangle équilatéral, carré, etc. en géométrie (premier mode de démonstration) ;

3° ces réalités acquises, il s'agit alors d'en démontrer les propriétés, comme l'égalité des angles, ou choses de ce genre (second mode de démonstration).

Cette présentation du raisonnement peut-elle servir à rendre compte des mathématiques telles que nous les connaissons aujourd'hui ?

---

[5] F. Zalaméa, « Lautman et la dialectique créatrice des mathématiques modernes », in A. Lautman, *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Vrin, 2006, p. 28.

[6] *Ibid*.

## 1. L'origine abstractive des notions premières et sa confrontation avec les thèses modernes

*Aspects de l'abstraction mathématique*

### a- Commentaria in octo libros Physicorum Lib. 2 ; lectio 3 ; n. 5

Comme c'est le cas pour toutes les autres connaissances, l'origine des notions mathématiques est à chercher dans l'abstraction selon saint Thomas – cf. texte 2, commentaire du livre II de la *Physique*, lect. 3, n. 5. L'abstraction consiste dans le fait que l'intellect face à son objet est capable de considérer à part certains aspects formels constitutifs de la réalité étudiée et donnée dans l'expérience, et de dégager en acte ces aspects pour eux-mêmes. La doctrine est connue, et je me permets de ne pas la développer, si ce n'est pour dire que le fait que l'obtention des notions universelles suppose la connaissance inductive préalable des particulières permet d'assurer le caractère réel des propriétés ainsi considérées de manière abstraite. L'abstraction n'est pas en effet *secundum esse* (selon l'ordre de l'existence), mais *secundum intellectum* (selon l'ordre des raisons formelles, que l'intellect dégage pour elles-mêmes).

Appliquée aux mathématiques, la thèse conduit à dire que *les quantités et les propriétés qu'elles contiennent* sont obtenues par abstraction ou non considération du mouvement et des qualités sensibles. Par contre, ces quantités suppose le maintien de la matière intelligible, sur laquelle st Thomas n'est pas très disert, mais qui correspond précisément aux propriétés d'ordre quantitatif.

+ Quelles sont ces propriétés ? C'est précisément à l'art et à la science du mathématicien de le dire, tout au moins pour leur détail, et au-delà des propriétés très générales de l'étendue continue ou de la multiplicité et de l'unité discrètes.

+ De sorte que la considération des rapports de quantité qui peuvent exister entre les objets mathématiques *sont libres au sens où le mathématicien est libre d'envisager les objets selon tel ou tel type de rapport*. Pour prendre des exemples élémentaires, le géomètre peut considérer le demi-cercle comme une partie du cercle, ou bien comme un angle de 180 degrés, etc. L'essentiel étant que *les relations ainsi envisagées le sont par l'intellect, qui actualise par son travail, et en tant que cause efficiente ces rapports, contenus certes dans les dimensions quantitatives, mais en puissance.*

*A priori*, on ne voit pas ce qui empêcherait d'élargir les types de rapports envisageables, et d'y inclure ce que l'algèbre, par exemple, a pu mettre à jour. Mais je vais y revenir plus loin.

### b- Summa Theologiae I, q. 85, a. 1 ad 2um

Ce passage de la *Somme* revient à son tour sur la question.

+ Saint Thomas y précise les diverses formes de matière, en distinguant la *matière sensible individuelle* (telle chair donnée dans l'expérience) de *la matière sensible commune* (la chair ou les os). L'abstraction mathématique correspond à une abstraction de ces deux formes, pour ne retenir que la matière intelligible, qui est définie comme la *substance qui sous-tend la quantité*.

+ Intervient alors à nouveau, pour la matière intelligible, la distinction entre *matière individuelle* et *matière commune*, la mathématique ne retenant que cette dernière : il n'est pas essentiel au mathématicien de prendre en compte telle forme intelligible particulière, tel triangle ou tel cercle, avec telle ou telle dimension, mais bien le cercle ou le triangle en soi.

+ Il reste que pour saint Thomas, il faut que la matière intelligible commune s'incarne dans une forme. D'où le fait qu'il parle *des quantités*, car il y en a aussitôt de plusieurs genres. La substance toutefois n'est ici que le support de la quantité, et *la considérer universellement, n'est-ce pas ouvrir la porte au primat de la relation ?* Qu'est-ce qui est constant dans le cercle, en effet, sinon les rapports entre le rayon et la circonférence, ou entre le rayon et la surface ? Qu'est-ce qui définit le nombre abstrait (le nombre nombrant), sinon son rapport à l'unité qui le mesure ? Il y a là une voie qui, sans doute, peut être radicalisée.

*Application aux mathématiques modernes*

+ La question n'en reste pas moins d'abord de savoir si l'on peut légitimement abstraire à un second niveau et concevoir une substance totalement indéterminée, à la manière de Descartes. Autrement dit passer *des quantités* à *la quantité*. On est alors certes loin du fondement empirique premier de la connaissance mathématique, mais on ne voit pas ce qui empêche non de faire l'opération (de fait, les mathématiciens pensent ainsi), mais de la concevoir comme l'aboutissement du travail d'abstraction.

+ *La conséquence immédiate est alors toutefois de dégager franchement la relation pour elle-même*. Si le support est en effet en soi indéterminé, une pure quantité, la relation devient le seul élément déterminé. Telle est de fait la logique induite par l'algèbre, qui atteint un certain aboutissement avec la théorie des groupes de transformations. Alors que saint Thomas pense des relations internes à un objet et déterminées par lui (la circonférence du cercle = Π2R dépend de la nature du cercle), la relation devient ici première : la fonction linéaire $y= ax$ définit une relation qui ne dépend pas des termes.

+Il faut ajouter que, dès lors qu'il a affaire à une fonction quelque peu complexe, le mathématicien doit se donner un cadre défini dans lequel la relation est opérante. Ainsi, la fonction logarithme népérien *ln*, est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ qui à $x > 0$, associe le réel y solution de l'équation $e^y = x$ : elle ne vaut pas en dehors de ces limites, en l'occurrence l'ensemble des réels positifs. *Mais, ce domaine d'application de la fonction, comme on peut encore dire, c'est la relation elle-même qui l'impose : c'est elle qui détermine le possible et l'impossible en ce qui la concerne.*

+ Il y a là assurément une logique de raisonnement qui n'est pas celle de la mathématique euclidienne. Mais on ne voit pas qu'elle contredise la théorie de l'abstraction mathématique *dans la mesure où celle-ci affirme de la manière la plus nette le rôle de l'intellect dans la constitution du domaine d'abstraction, d'une part, mais aussi dans la détermination des objets eux-mêmes* : c'est la part opérative du raisonnement, qui joue d'autant plus à fond dans les mathématiques modernes que le domaine d'abstraction est en lui-même indéterminé.

+ Or, à ce niveau d'abstraction où aucun objet déterminé n'est *a priori* donné, il devient nécessaire de partir d'une part des propriétés les plus générales, d'autre part d'hypothèses. Il ne saurait en aller autrement, dès lors que l'on part de données très indéterminées : car l'esprit ne peut raisonner sur de l'indéterminé pur. Si donc des déterminations ne lui sont pas données au départ du raisonnement, il lui faut s'en

doter. C'est la voie ouverte à la logique axiomatique au sens moderne du terme, c'est-à-dire à des raisonnements fondés systématiquement sur des postulats. Mais c'est aussi la voie ouverte à un constructivisme renforcé, car le seul critère de discrimination entre le vrai et le faux mathématique est le succès dans le raisonnement logique, le fait de parvenir à des déductions et des calculs cohérents du point de vue logique[7].

Que pour être fort éloignées des conceptions classiques des mathématiques et de la théorie de l'abstraction, les conceptions modernes ne sont malgré tout pas incompatibles avec elles, c'est ce qu'un autre aspect de la conception thomasienne permet de montrer.

## 2. Le primat du continu et le rôle de l'infini

Le principe de l'arithmétique est pour saint Thomas l'unité, qui est définie comme indivis.

+Il distingue l'*unité transcendantale* (indivision de l'être avec lui-même, qui repose sur la distinction des formes et s'applique aussi bien aux être immatériels, donc non quantitatifs, que matériels) de l'*unité prédicamentale ou arithmétique*, qui est la mesure de la quantité.

+ Concernant la grandeur, il distingue encore le *nombre concret* (ou nombré – combien il y a de moutons dans le troupeau), du *nombre abstrait*, qui est l'objet propre de l'arithmétique.

Or, celui-ci s'obtient par division du continu : cf. texte 4a - *Sententia De anima, lib. 3 l. 1 n. 15* sur le nombre arithmétique :

1° <u>Numerus (…) cognoscitur per negationem continui, quod est magnitudo.</u>

Le continu est donc premier, et la *négation* du continu permet de dégager les unités - au niveau de la perception par la distinction de la diversité inhérente à la multitude d'abord perçue, puis du fait de l'introduction par l'intellect de discontinuités (par l'opération de mesure par exemple), et par suite les nombres, qui sont le résultat d'un jugement : *tel objet n'est pas continu* mais intègre des ruptures, des discontinuités, ou, comme dirait Thom, des saillances.

2° <u>Numerus enim rerum sensibilium, ex divisione continui causatur</u>

La négation du continu qui permet de *connaître* le nombre entraîne la division : si l'objet présente des discontinuités, il peut donc être divisé en *parties* ou *éléments*. C'est bien la division qui est dite *cause* du nombre : autrement dit, c'est l'intellect par son opération de division du continu qui produit le nombre, concret puis abstrait, par abstractions successives.

[7] Il va de soi que tout le vaste domaine des mathématiques appliquées et de la modélisation, en ingénierie notamment, ajoute la dimension expérimentale. Le raisonnement vaut ici pour les mathématiques pures.

3° Unde et proprietates numeri per proprietates continui cognoscuntur.

Proposition remarquable puisqu'elle affirme une dépendance de la connaissance des propriétés arithmétiques vis-à-vis de la connaissance des propriétés du continu, semblant ouvrir une brèche dans l'interdit de la métabase (passage d'un genre à l'autre). Je ne peux développer ici – cf. version écrite.

4° Quia enim continuum divisibile est in infinitum, et numerus in infinitum crescere potest.

La dépendance n'est pas que d'ordre logique, mais correspond à une dépendance dans la réalité mathématique elle-même, en l'occurrence le continu est le fondement de l'infinité des nombres.

+ Il doit être possible d'extrapoler : si le continu est ainsi au fondement de l'ordre mathématique comme principe dans lequel l'intellect par ses opérations propres est capable de dégager en acte l'ordre des nombres, ne peut-on pas y voir de manière plus large le fondement de l'ensemble des relations que par leur travail les mathématiciens sont capables de mettre à jour ? Car le continu contient l'infini en puissance : *n'est-il pas possible de concevoir que cet infini ne soit pas seulement un infini de division, mais un infini de relations ?* Car en tant qu'il contient l'infini en puissance, le continu revêt un aspect inépuisable, que l'intellect peut explorer presque sans fin, selon les divers regards formels qu'il y projette, et en fonction des opérations qu'il est capable de concevoir.

+ Le tout n'est pas arbitraire, car le continu n'est pas un pur indéterminé, comme serait la matière pure, mais en tant que quantifié, revêt déjà des propriétés formelles. Mais c'est suffisamment indéterminé pour que l'intellect y trouve une certaine liberté, associée à la rigueur la plus grande, association en apparence paradoxale, mais en apparence seulement, et dont l'évolution des mathématiques à l'époque moderne semble témoigner de la manière la plus claire.

*Conclusion*

Conception d'une abstraction poussée à l'extrême, prise en compte du primat accordé par saint Thomas au continu : telles seraient les voies, ou certaines des voies à explorer pour s'efforcer de rendre compte de manière réaliste des mathématiques modernes – ce qui reste à faire.

Les deux points convergent dans le travail de l'intellect, et de sa liberté, et devrait permettre d'expliquer l'illusion persistante qui veut que les mathématiques soient *la* science universelle, voire la forme même de l'esprit.

Guilhem Golfin