Matemáticas y formas de abstracción: ¿Permite el enfoque realista de santo Tomás pensar las matemáticas modernas?

Introducción

El jesuita Peter Hoenen señaló en 1934 una paradoja: en una época en la que la investigación matemática experimentaba un vigoroso desarrollo entre los epistemólogos, los filósofos neoescolásticos la habían abandonado casi por completo; sin embargo, se trataba de un campo de investigación fundamental para el tomismo[1] . Desde entonces, casi un siglo después, no parece que este campo haya sido muy explorado, y sin embargo, la importancia de las matemáticas modernas para el realismo filosófico sigue siendo de primer orden. Si lo que sigue consigue hacer percibir esta importancia, no habrá sido en vano.

Al plantear la cuestión de la pertinencia de la filosofía de las matemáticas de santo Tomás, teniendo en cuenta los formidables avances que ha experimentado esta ciencia, sobre todo a partir del siglo XVI, y lo que comúnmente se denomina la revolución científica, no se trata de preguntarse si santo Tomás anticipó de alguna manera estos cambios. La respuesta a esta pregunta es, evidentemente, no. Por otra parte, no tenía por qué hacerlo, ya que él mismo no era matemático. Se trata de mostrar que no hay incompatibilidad entre el conocimiento matemático moderno y el realismo filosófico. En otras palabras, se trata de demostrar, para empezar y antes de poder ir más allá, que la teoría abstractiva del conocimiento permite, si no explicar en detalle los desarrollos matemáticos y los razonamientos que estos implican, lo cual no es necesario ni realmente útil, al menos justificar dichos desarrollos. Esa es precisamente la función de la filosofía de las matemáticas, al menos en un primer nivel.

Pero tan pronto como se enmarca así el trabajo, se le oponen una serie de objeciones que plantean tantas dificultades de diversa índole, tanto fácticas como de principio.

Comenzaré exponiendo y examinando las principales de estas dificultades, para luego mostrar en qué medida la filosofía matemática de santo Tomás permite responder a ellas.

I. Dificultades inherentes a las concepciones de las matemáticas

La primera dificultad que se presenta a quien se interesa por la filosofía de las matemáticas de santo Tomás es que el santo doctor no le dedicó ningún escrito específico, por lo que se encuentra dispersa a lo largo de su obra. Afortunadamente, e e existe un estudio que se ha esforzado por hacer esta síntesis en la medida de lo

[1] Véase P. Hoenen, «A field of Research for Scholasticism», *The Modern Schoolman*, 12, noviembre de 1934, p. 15 *y ss.*

posible, recopilando todos los lugares en los que santo Tomás habla de las matemáticas, el del claretiano y profesor de filosofía mexicano José Álvarez Laso, *La Filosofía de las Matemáticas en Santo Tomás,* publicado en 1952[2] .

Pero más allá de esta dificultad, los principales obstáculos que se nos presentan son inherentes a la propia concepción de las matemáticas.

A continuación examino sucesivamente:

1° El carácter anticuado de los conocimientos matemáticos de santo Tomás;

2° Su dependencia de Aristóteles, que puede parecer problemática;

3° La impugnación por parte de los modernos de la presentación de las matemáticas como ciencia de la cantidad.

1. Una concepción ligada a una etapa determinada de la historia de las matemáticas

El primer punto a destacar es, en efecto, que santo Tomás razona sobre las matemáticas principalmente en función de Euclides, a quien estudió en Nápoles siguiendo la formación del *Quadrivium*.

Ahora bien, ¿permite un análisis de las matemáticas euclidianas dar cuenta de los desarrollos posteriores de las matemáticas?

Los modernos responden negativamente: las matemáticas modernas están tan por encima de Euclides que no se pueden concebir en función de este último.

2. Una concepción relacionada con la filosofía de Aristóteles

Gran parte de los desarrollos de santo Tomás sobre las matemáticas están relacionados con los comentarios de Aristóteles y Boecio[3] . Sin embargo, si nos atenemos al primero, su relación con las matemáticas de su época es controvertida:

+ Aristóteles habría desconocido los avances matemáticos de su época para quedarse en una concepción pitagórica;

+ sus razonamientos matemáticos (sobre todo en *Física*) serían mediocres;

+ no habría comprendido la relación entre las matemáticas y la física, oponiéndose a la física matemática (véase Arquímedes);

+ la lógica denominada formal (predicativa) se opondría a los razonamientos propios de las matemáticas: véase el método cartesiano, o lo que Léon Brunschvicg denominaba «la filosofía matemática».

---

[2] José Álvarez Laso, *La Filosofía de las Matemáticas en Santo Tomás,* Editorial Jus., México, 1952. Agradezco sinceramente al abad Alain Contat por haberme facilitado esta referencia.

[3] Se trata sobre todo de los comentarios a la *Física,* los *Segundos Analíticos,* que abundan en ejemplos extraídos de las matemáticas, y del comentario al *De Trinitate* de Boecio, en el que santo Tomás desarrolla su concepción de la jerarquía de las ciencias y de lo que se ha denominado los grados de abstracción. Véase *más adelante.*

Es cierto que hay una serie de argumentos que permiten dar algunas respuestas, pero la oposición de la lógica predicativa a las matemáticas parece encontrar confirmación en la invención de la logística a finales del siglo XIX y principios del XX, y la posición que las opone encuentra un refuerzo en la postura del filósofo aristotélico André de Muralt, que opone la proposición predicativa a la proposición matemática, acercando esta última a las tesis de Ockham y, más allá, a las de Platón.

¿Cómo podría Santo Tomás escapar a las mismas críticas?

3. ¿Las matemáticas, una ciencia de la cantidad?

Si nos adentramos en el análisis de las matemáticas, enseguida nos encontramos con dificultades inherentes a la concepción de esta ciencia y de su objeto.

Para empezar, santo Tomás, siguiendo a Aristóteles, establece como objeto de las matemáticas la cantidad: «*mathematicae scientiae sunt de quantitate continua vel discreta*» (*In Anal. Post. I, lect. 2 n. 5*).

Ahora bien, hay dos puntos que ya no parecen tan evidentes para los modernos.

+ Se cuestiona el hecho de que las matemáticas —y la ciencia moderna en general— solo se refieran a la cantidad.

+ La división de la cantidad entre cantidad discreta y cantidad continua es también un punto cuestionado por los modernos, y ello desde la invención del álgebra geométrica por Descartes: haber logrado superar esta oposición sería incluso una característica distintiva de las matemáticas modernas[4] .

+ Hacer de las matemáticas la ciencia de la cantidad es seguir convirtiéndolas en *una ciencia especial*; pero este es otro punto controvertido por los modernos, desde la noción de *mathesis universalis,* promovida por Leibniz, pero ya germinada en Descartes, y cuyo sueño de un pensamiento reducido al cálculo atraviesa toda la modernidad hasta los desarrollos contemporáneos: la evolución de las matemáticas siempre ha tendido a presentarlas como la forma misma del pensamiento, reducido a su estructura lógica. Es evidente que entonces estamos lejos de una ciencia especial.

+ Por último, convertir las matemáticas en la ciencia de la cantidad las inscribe en el marco de lo que podemos llamar una analítica de la sustancia, entendiendo por esta expresión el hecho de que la cantidad en cuestión se concibe, como hemos recordado, como la primera afección de una sustancia sensible, y se desprende por sí misma mediante inducción abstractiva. Ahora bien, tal analítica choca con la primacía que se da a la relación en el marco de las matemáticas modernas.

El concepto aristotélico de sustancia desaparece así por completo del horizonte de las matemáticas modernas, y desde este punto de vista hay que dar la razón a André de Muralt cuando relaciona las matemáticas con la dialéctica de Platon. Como ilustración que confirma esta aproximación, podemos citar las tesis de Albert Lautman (matemático y filósofo de las matemáticas, 1908-1944), quien interpreta de manera dialéctica las matemáticas, en función de Ideas concebidas como «esquemas de

[4] Véase J. Dieudonné, *op. cit.,* p. 37. En relación con el punto anterior, Dieudonné señala aquí que se han puesto de manifiesto estructuras topológicas —por definición continuas— en la teoría de los números.

estructura según los cuales se organizan las teorías efectivas » y que ponen en juego la dialéctica de lo Mismo y lo Otro, según « un platonismo mejor adaptado a las complejidades de la realidad matemática: un platonismo estructural y dinámico, no reificado, inmóvil o eterno »[5] .

Aquí queda claro que la *mathesis*, lejos de ser una ciencia especial, tiende a presentarse como la ciencia de las estructuras fundamentales de lo real, según un modo ideal del que la realidad física sería un participante.

Pero también queda claro que esta *mathesis* es inseparable de una filosofía, y no es sorprendente desde este punto de vista, aunque tampoco carece de interés, que Zalamea establezca un paralelismo con el comentario de Heidegger sobre *el Sofista*, contemporáneo de los trabajos de Lautman, pero que este último ignoró[6] . No hay duda de que la resolución definitiva de la cuestión no se juega en la metafísica, en la confrontación con la filosofía del Uno, que las matemáticas modernas ponen claramente en juego. Pero antes de llegar a este nivel de reflexión y para lograrlo, es necesario enfrentarse a las matemáticas en sí mismas.

¿Es capaz de hacerlo la teoría abstractiva de las matemáticas desarrollada por santo Tomás?

II. Elementos de respuesta tomistas

El razonamiento matemático general es presentado de manera muy sintética pero muy precisa por santo Tomás en un pasaje del *comentario sobre los Segundos Analíticos* (lect. 2 n. 5 – cf. texto n.º 1).

Tomás destaca las tres etapas del razonamiento matemático:

1° la presuposición de los datos primarios del género de la cantidad, la unidad, la línea, la superficie y otros;

2° la búsqueda y determinación mediante demostraciones operativas, es decir, mediante la construcción («quasi operativae») de las realidades que se derivan de ellas, triángulo equilátero, cuadrado, etc. en geometría (primer modo de demostración);

3° una vez adquiridas estas realidades, se trata entonces de demostrar sus propiedades, como la igualdad de los ángulos, o cosas por el estilo (segundo modo de demostración).

¿Puede esta presentación del razonamiento servir para explicar las matemáticas tal y como las conocemos hoy en día?

1. El origen abstractivo de los conceptos primarios y su confrontación con las tesis modernas

[5] F. Zalaméa, «Lautman et la dialectique créatrice des mathématiques modernes», en A. Lautman, *Les mathématiques, les idées et le réel physique,* Vrin, 2006, p. 28.
[6] *Ibid.*

Aspectos de la abstracción matemática

a- Commentaria in octo libros Physicorum Lib. 2; lectio 3; n. 5

Al igual que ocurre con todos los demás conocimientos, el origen de los conceptos matemáticos hay que buscarlo en la abstracción, según santo Tomás (véase el texto 2, comentario al libro II de la *Física*, lect. 3, n. 5). La abstracción consiste en que el intelecto, ante su objeto, es capaz de considerar por separado ciertos aspectos formales constitutivos de la realidad estudiada y dada en la experiencia, y de destacar en acto esos aspectos por sí mismos. La doctrina es conocida, y me permito no desarrollarla, salvo para decir que el hecho de que la obtención de las nociones universales suponga el conocimiento inductivo previo de las particulares permite asegurar el carácter real de las propiedades así consideradas de manera abstracta. La abstracción no es, en efecto, *secundum esse* (según el orden de la existencia), sino *secundum intellectum* (según el orden de las razones formales, que el intelecto destaca por sí mismas).

Aplicada a las matemáticas, la tesis lleva a decir que *las cantidades y las propiedades que contienen* se obtienen por abstracción o no consideración del movimiento y las cualidades sensibles. Por el contrario, estas cantidades suponen el mantenimiento de la materia inteligible, sobre la que santo Tomás no se explaya mucho, pero que corresponde precisamente a las propiedades de orden cuantitativo.

+ ¿Cuáles son estas propiedades? Corresponde precisamente al arte y a la ciencia del matemático decirlo, al menos en lo que se refiere a sus detalles, y más allá de las propiedades muy generales de la extensión continua o de la multiplicidad y la unidad discretas.

+ De modo que la consideración de las relaciones de cantidad que pueden existir entre los objetos matemáticos *es libre, en el sentido de que el matemático es libre de considerar los objetos según tal o cual tipo de relación*. Por poner ejemplos elementales, el geómetra puede considerar el semicírculo como una parte del círculo, o bien como un ángulo de 180 grados, etc. Lo esencial es que *las relaciones así consideradas lo son por el intelecto, que actualiza por su trabajo, y como causa eficiente, estas relaciones, contenidas ciertamente en las dimensiones cuantitativas, pero en potencia.*

A priori, no se ve qué impediría ampliar los tipos de relaciones posibles e incluir en ellas lo que, por ejemplo, el álgebra ha podido poner de manifiesto. Pero volveré sobre esto más adelante.

b- Summa Theologiae I, q. 85, a. 1 ad 2um

Este pasaje de la *Suma* vuelve a abordar la cuestión.

+ Santo Tomás precisa en él las diversas formas de materia, distinguiendo la *materia sensible individual* (como la carne dada en la experiencia) de *la materia sensible común* (la carne o los huesos). La abstracción matemática corresponde a una abstracción de estas dos formas, para retener solo la materia inteligible, que se define como la *sustancia que subyace a la cantidad*.

+ Entonces interviene de nuevo, para la materia inteligible, la distinción entre *materia individual* y *materia común*, ya que las matemáticas solo retienen esta última:

para el matemático no es esencial tener en cuenta una forma inteligible particular, como un triángulo o un círculo, con tal o cual dimensión, sino el círculo o el triángulo en sí mismo.

+ Sin embargo, para santo Tomás, la materia inteligible común debe encarnarse en una forma. De ahí que hable *de cantidades*, ya que hay varios tipos. Sin embargo, la sustancia no es aquí más que el soporte de la cantidad, y *considerarla universalmente, ¿no es abrir la puerta a la primacía de la relación?* ¿Qué es lo que permanece constante en el círculo, si no es la relación entre el radio y la circunferencia, o entre el radio y la superficie? ¿Qué define al número abstracto (el número que cuenta), si no es su relación con la unidad que lo mide? Aquí hay un camino que, sin duda, puede radicalizarse.

Aplicación a las matemáticas modernas

+ La cuestión sigue siendo, en primer lugar, si se puede abstraer legítimamente a un segundo nivel y concebir una sustancia totalmente indeterminada, al estilo de Descartes. En otras palabras, pasar *de las cantidades* a *la cantidad*. Es cierto que entonces nos alejamos del fundamento empírico primario del conocimiento matemático, pero no vemos qué impide no solo realizar la operación (de hecho, los matemáticos piensan así), sino concebirla como el resultado del trabajo de abstracción.

+ *La consecuencia inmediata es, sin embargo, separar claramente la relación por sí misma*. Si el soporte es en sí mismo indeterminado, una cantidad pura, la relación se convierte en el único elemento determinado. Tal es, de hecho, la lógica inducida por el álgebra, que alcanza una cierta culminación con la teoría de los grupos de transformaciones. Mientras que santo Tomás piensa en relaciones internas a un objeto y determinadas por él (la circunferencia del círculo = $\Pi 2R$ depende de la naturaleza del círculo), aquí la relación pasa a ser primaria: la función lineal $y= ax$ define una relación que no depende de los términos.

+Hay que añadir que, cuando se trata de una función algo compleja, el matemático debe establecerse un marco definido en el que la relación sea operativa. Así, la función logaritmo natural *ln* es la función definida en $]0 ; +\infty[$ que, para $x > 0$, asocia el real y solución de la ecuación $e^{(y)} = x$: no es válida fuera de estos límites, en este caso el conjunto de los reales positivos. *Pero este dominio de aplicación de la función, como aún se puede decir, es la propia relación la que lo impone: es ella la que determina lo posible y lo imposible en lo que a ella respecta.*

+ Sin duda, hay aquí una lógica de razonamiento que no es la de las matemáticas euclidianas. Pero no vemos que contradiga la teoría de la abstracción matemática, *en la medida en que esta afirma de la manera más clara el papel del intelecto en la constitución del dominio de la abstracción, por un lado, pero también en la determinación de los propios objetos*: es la parte operativa del razonamiento, que juega un papel aún más importante en las matemáticas modernas, ya que el ámbito de la abstracción es en sí mismo indeterminado.

+ Ahora bien, en este nivel de abstracción, en el que no se da *a priori* ningún objeto determinado, es necesario partir, por un lado, de las propiedades más generales y, por otro, de hipótesis. No puede ser de otra manera, ya que se parte de datos muy indeterminados: la mente no puede razonar sobre lo puramente indeterminado. Por lo tanto, si no se le dan determinaciones al inicio del razonamiento, debe dotarse de ellas

. [7]Es el camino abierto a la lógica axiomática en el sentido moderno del término, es decir, a razonamientos basados sistemáticamente en postulados. Pero también es el camino abierto a un constructivismo reforzado, ya que el único criterio de discriminación entre lo verdadero y lo falso en matemáticas es el éxito en el razonamiento lógico, el hecho de llegar a deducciones y cálculos coherentes desde el punto de vista lógico.

Que, a pesar de estar muy alejadas de las concepciones clásicas de las matemáticas y de la teoría de la abstracción, las concepciones modernas no son incompatibles con ellas, es lo que permite demostrar otro aspecto de la concepción tomasiana.

2. La primacía de lo continuo y el papel del infinito

Para santo Tomás, el principio de la aritmética es la unidad, que se define como indivisible.

+Distingue *la unidad trascendental* (indivisibilidad del ser consigo mismo, que se basa en la distinción de las formas y se aplica tanto a los seres inmateriales, por lo tanto no cuantitativos, como a los materiales) de *la unidad predicamental o aritmética*, que es la medida de la cantidad.

+ En cuanto a la magnitud, distingue además entre el *número concreto* (o contado, cuántas ovejas hay en el rebaño) y *el número abstracto*, que es el objeto propio de la aritmética.

Ahora bien, este se obtiene mediante la división del continuo: cf. texto 4a - *Sententia De anima, lib. 3 l. 1 n. 15* sobre el número aritmético:

1° <u>Numerus (…) cognoscitur per negationem continui, quod est magnitudo.</u>

Por lo tanto, lo continuo es lo primero, y la *negación* de lo continuo permite destacar las unidades, a nivel de la percepción, mediante la distinción de la diversidad inherente a la multitud percibida en un primer momento y, a continuación, mediante la introducción por parte del intelecto de discontinuidades (por ejemplo, mediante la operación de medición) y, en consecuencia, los números, que son el resultado de un juicio: *tal objeto no es continuo*, sino que integra rupturas, discontinuidades o, como diría Thom, salientes.

2° <u>Numerus enim rerum sensibilium, ex divisione continui causatur</u>

La negación de lo continuo que permite *conocer* el número conlleva la división: si el objeto presenta discontinuidades, puede dividirse en *partes* o *elementos*. Es precisamente la división la que se considera *causa* del número: en otras palabras, es el

[7] Huelga decir que todo el vasto campo de las matemáticas aplicadas y la modelización, en particular en ingeniería, añade la dimensión experimental. El razonamiento es válido aquí para las matemáticas puras.

intelecto, mediante su operación de división de lo continuo, el que produce el número, primero concreto y luego abstracto, mediante abstracciones sucesivas.

3° Unde et proprietates numeri per proprietates continui cognoscuntur.

Propuesta notable, ya que afirma una dependencia del conocimiento de las propiedades aritméticas con respecto al conocimiento de las propiedades del continuo, lo que parece abrir una brecha en la prohibición de la metabase (paso de un género a otro). No puedo desarrollar aquí —véase la versión escrita—.

4° Quia enim continuum divisibile est in infinitum, et numerus in infinitum crescere potest.

La dependencia no es solo de orden lógico, sino que corresponde a una dependencia en la propia realidad matemática, en este caso el continuo es el fundamento de la infinidad de los números.

+ Debe ser posible extrapolar: si el continuo es así la base del orden matemático como principio en el que el intelecto, mediante sus propias operaciones, es capaz de desvelar en acto el orden de los números, ¿no podemos ver en él, de manera más amplia, la base del conjunto de relaciones que los matemáticos son capaces de actualizar mediante su trabajo? Porque el continuo contiene el infinito en potencia: *¿no es posible concebir que este infinito no sea solo un infinito de división, sino un infinito de relaciones?* Porque, en la medida en que contiene el infinito en potencia, el continuo reviste un aspecto inagotable, que el intelecto puede explorar casi sin fin, según las diversas miradas formales que proyecta sobre él y en función de las operaciones que es capaz de concebir.

+ El todo no es arbitrario, ya que el continuo no es un puro indeterminado, como lo sería la materia pura, sino que, en cuanto cuantificado, ya reviste propiedades formales. Pero es lo suficientemente indeterminado como para que el intelecto encuentre en él una cierta libertad, asociada al mayor rigor, una asociación aparentemente paradójica, pero solo en apariencia, y de la que la evolución de las matemáticas en la época moderna parece dar testimonio de la manera más clara.

Conclusión

La concepción de una abstracción llevada al extremo, teniendo en cuenta la primacía que Santo Tomás otorga a lo continuo: estas serían las vías, o algunas de las vías, que habría que explorar para intentar dar cuenta de manera realista de las matemáticas modernas, lo que aún queda por hacer.

Ambos puntos convergen en el trabajo del intelecto y su libertad, y deberían permitir explicar la persistente ilusión de que las matemáticas son *la* ciencia universal, incluso la forma misma del espíritu.

Guilhem Golfin